3学年数学　定期テスト②　模範解答・解説

過去問リメイク版（2023・2024・2025年度 出題内容より／数値変更）　範囲：因数分解・平方根

【配点】合計 100点　／　小問 37問
知識・技能＝64点：知技1（2点×5＝10）・知技2（2点×6＝12）・知技3（3点×4＝12）・知技4（3点×6＝18）・知技5（3点×4＝12）
思考・判断・表現＝36点：考1（3点×3＝9）・考2（3点×2＝6）・考3（3点×2＝6）・考4（3点×2＝6）・考5（3点×1＝3）・考6（3点×2＝6）

知技 1　正誤の判定　［各2点／計10点］

①	○	「a の平方根」は 2乗して a になる数で、正と負の**2つ**ある。$6^2=36$、$(-6)^2=36$ なので ±6 で正しい。
②	**±3**	まず $\sqrt{81}=9$。聞かれているのは「**9 の**平方根」なので ±3。 検算：$3^2=9$、$(-3)^2=9$ ○　／$\sqrt{81}$ をそのまま 81 と読みちがえて ±9 としないこと。この問題は毎年出る引っかけ。
③	**7**	記号 $\sqrt{\ }$ は**正の平方根だけ**を表す。49 の平方根は ±7 だが、$\sqrt{49}$ は 7 のみ。
④	○	$0.4^2=0.16$ であり、$\sqrt{\ }$ は正のほうなので $\sqrt{0.16}=0.4$。正しい。
⑤	**6**	先に中を計算する。$(-6)^2=36$ だから $\sqrt{36}=6$。 一般に $\sqrt{a^2}$ は「a の**絶対値**」になる。a が負のときは符号が変わることに注意。

知技 2　平方根の基本　［各2点／計12点］

(1)	$3\sqrt{5}$	$45=9\times5=3^2\times5$ → $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$（最簡の形）。「$\sqrt{\ }$の中を素因数分解して、2個ずつ外に出す」
(2)	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	先に $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ と簡単にしてから有理化する。 $\dfrac{6}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（分母に $\sqrt{\ }$ が残っていないことを必ず確認）
(3)	$-\sqrt{5}<-2<-\sqrt{3}<-1.5$	すべて $\sqrt{\ }$ の形にそろえて比べる。$-2=-\sqrt{4}$、$-1.5=-\sqrt{2.25}$。 中の数は $5>4>3>2.25$ だが、**負の数は中が大きいほど小さい**ので順番が逆になる。 検算（概数）：$-2.24<-2<-1.73<-1.5$ ○
(4)	**2個**	$\sqrt{0.04}=0.2$（有理数）、$\sqrt{7}$（**無理数**）、**π**（**無理数**）、$\dfrac{3}{4}$（有理数）、$\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5$（有理数）、0（有理数）、$-\sqrt{9}=-3$（有理数）。 $\sqrt{\ }$ がついていても、中が平方数なら有理数になる。見た目でなく計算してから判断する。

(5)	**6個**	各辺は正なので2乗してよい。$3^2<a<4^2$　→　$9<a<16$。 a＝10、11、12、13、14、15 の **6個**。（9 と 16 は不等号が ＜ なのでふくまない）
(6)	**n＝5**	$180=2^2\times3^2\times5$。すでに 2 と 3 はペアになっているので、5 が1個あまる。 n＝5 とすれば $180n=2^2\times3^2\times5^2=900=30^2$。 検算：$\sqrt{900}=30$（自然数）○

知技 3　平方根の計算（乗除）　［各3点／計12点］

(1)	$9\sqrt{2}$	$\sqrt{27}\times\sqrt{6}=\sqrt{162}=\sqrt{81\times2}=9\sqrt{2}$（最簡） 別解：$3\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{18}=3\times3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$（先に簡単にするほうが速い）
(2)	-4	符号は（＋）÷（−）×（＋）＝（−）。 $\sqrt{48}\div\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{48\times2}{6}}=\sqrt{16}=4$　よって -4
(3)	$5\sqrt{3}$	符号は（−）×（＋）÷（−）＝（＋）。 $\sqrt{\dfrac{50\times21}{14}}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$（最簡） $50\times21\div14$ は、先に $21\div14=\dfrac{3}{2}$ と約分して $50\times\dfrac{3}{2}=75$。
(4)	$-3\sqrt{2}$	$\dfrac{6}{\sqrt{12}}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ $\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=-2\times3=-6$ $-6\div\sqrt{2}=\dfrac{-6}{\sqrt{2}}=\dfrac{-6\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}$　（分母の有理化を忘れない）

知技 4　平方根の計算（加減・展開）　［各3点／計18点］

(1)	$-3\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$ を文字 a のように扱う。$5a-8a=-3a$ と同じ。よって $(5-8)\sqrt{7}=-3\sqrt{7}$。
(2)	$6\sqrt{3}$	まず全部 $\sqrt{3}$ にそろえる。$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$、$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$、$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(5-3+4)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
(3)	$5\sqrt{2}-5\sqrt{3}$	分配法則でかっこを外す。 $\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$、　$\sqrt{5}\times\sqrt{15}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は中がちがうので、これ以上まとめられない。
(4)	$10+2\sqrt{21}$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を使う。 $=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$ $21=3\times7$ に平方因数はないので $\sqrt{21}$ が最簡。
(5)	$-9+2\sqrt{6}$	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ の形。x を $\sqrt{6}$ とみる。 $=(\sqrt{6})^2+(-3+5)\sqrt{6}+(-3)\times5=6+2\sqrt{6}-15=-9+2\sqrt{6}$
(6)	$-8+6\sqrt{2}$	前半は和と差の積　$(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=5-2=3$ 後半は　$(\sqrt{2}-3)^2=2-6\sqrt{2}+9=11-6\sqrt{2}$ $3-(11-6\sqrt{2})=3-11+6\sqrt{2}=-8+6\sqrt{2}$ ひく式のかっこを外すとき、**符号の変わり忘れ**がいちばん多い失点。

知技 5 **因数分解** ［各3点／計12点］

(1)	**$2(x+2y)(x+3y)$**	まず**共通因数 2 をくくり出す**。$2(x^2+5xy+6y^2)$ かけて 6、たして 5 になるのは 2 と 3 →　$2(x+2y)(x+3y)$ 検算（展開）：$2(x^2+3xy+2xy+6y^2)=2x^2+10xy+12y^2$ ○　／共通因数のくくり出しを忘れると満点にならない。
(2)	**$(3x-4y)^2$**	$9x^2=(3x)^2$、$16y^2=(4y)^2$、$24xy=2\times3x\times4y$ なので $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ の形。 検算：$(3x-4y)^2=9x^2-24xy+16y^2$ ○
(3)	**$(x-6)(x+5)$**	$x+2=M$ とおく（おきかえ）。 $M^2-5M-24=(M-8)(M+3)$ M をもどして　$(x+2-8)(x+2+3)=(x-6)(x+5)$ 検算：$(x-6)(x+5)=x^2-x-30$。もとの式も $(x+2)^2-5(x+2)-24=x^2+4x+4-5x-10-24=x^2-x-30$ ○　／もどしたあとに**かっこの中を計算する**ところまでが答え。
(4)	**$(x+y+4)(x-y-4)$**	後ろの3項をまとめる（符号に注意）。 $x^2-(y^2+8y+16)=x^2-(y+4)^2$ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ の形なので、$A=x$、$B=y+4$ として $=\{x+(y+4)\}\{x-(y+4)\}=(x+y+4)(x-y-4)$ 検算：$x^2-(y+4)^2=x^2-y^2-8y-16$ ○

思考・判断・表現（36点）の解答・解説

考 1 **循環小数・有効数字・近似値** ［各3点／計9点］

(1)	**$\frac{4}{11}$**	$x=0.363636\cdots$ とおく。くり返しが**2けた**なので 100倍する。 $100x=36.363636\cdots$ $x=\ \ 0.363636\cdots$ 辺々ひいて　$99x=36$　→　$x=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$ 検算：$4\div11=0.3636\cdots$ ○　（約分を忘れない）
(2)	**$3.84\times10^5\ \mathrm{m^2}$**	有効数字3けたなので、上から3けた「3、8、4」をとって 3.84。 $384000=3.84\times100000=3.84\times10^5$ 0 を数えて 10 の何乗かを決める。38.4×10^4 は「整数部分が1けた」の条件に合わないので不可。
(3)	**0.2236**	小数のままでは与えられた値が使えない。**分数に直す**のがポイント。 $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{2.236}{10}=0.2236$ 検算：$0.2236^2=0.049996\cdots\fallingdotseq0.05$ ○　／$\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{1}{20}}$ と考えて $\sqrt{2}$ を使おうとすると行きづまる。分母が 100（$=10^2$）になるように直す。

考 2 **整数部分と小数部分** ［各3点／計6点］

(1)	**a＝3**	13 をはさむ平方数をさがす。9＜13＜16 だから　$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$　→　$3<\sqrt{13}<4$ よって整数部分は a＝3。（このとき小数部分は b＝$\sqrt{13}-3$　≒ 0.606 で、0＜b＜1 を満たす ○）
(2)	**13**	b＝$\sqrt{13}-3$。そのまま代入せず、**先に因数分解**する。 　$b^2+6b+9=(b+3)^2$ ここに b＋3＝($\sqrt{13}-3$)＋3＝$\sqrt{13}$ を代入して 　$(\sqrt{13})^2$＝**13** （小数部分）＝（もとの数）−（整数部分）という関係が使えるかがこの問題の山。

考3 $\sqrt{\ }$ の中が自然数になる条件 ［各3点／計6点］

(1)	**n＝20**	$20=2^2\times5$。20n が平方数になるには、あまっている 5 をペアにすればよいので n＝5×(自然数)² の形　→　n＝5、20、45、80、… このうち**2けた**でもっとも小さいのは n＝20。 検算：$20\times20=400=20^2$ なので $\sqrt{400}=20$（自然数）○　／n＝5 は1けたなので条件に合わず**不適**。
(2)	**n＝10、40、90、360**	$360=2^3\times3^2\times5$。$\frac{360}{n}$ が平方数になればよい。360 の約数のうち平方数は 1、4、9、36 の4つ。 $\frac{360}{n}=36$ のとき n＝10　／　＝9 のとき n＝40　／　＝4 のとき n＝90　／　＝1 のとき n＝360 （16、25 は 360 の約数ではないので、そうなる自然数 n は存在しない。） 検算：$\sqrt{36}=6$、$\sqrt{9}=3$、$\sqrt{4}=2$、$\sqrt{1}=1$　すべて自然数 ○

考4 式の値 ［各3点／計6点］

【共通の準備】　まず x＋y、x−y、xy を先に求めておく。

$$x+y=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\qquad x-y=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$$

(1)	$\sqrt{15}$	$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$　（15＝3×5 に平方因数はないので最簡）
(2)	**4**	$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\times\frac{1}{2}=5-1=4$ 検算（概数）：x≒1.986、y≒0.252 より $x^2+y^2\fallingdotseq3.944+0.063\fallingdotseq4.01$ ○

■ **ポイント**　x、y をそのまま代入して2乗すると計算が大変になる。**対称式は x＋y と xy で表せる**ので、先にこの2つを求めるのが定石。(2) の変形 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ は必ず覚えておくこと。

考5 正方形の周の長さの差 ［3点］

答	**$4\sqrt{2}$ cm**	**立式の根拠**：正方形の1辺の長さは（面積）の**正の**平方根（長さは負にならないので負の平方根は**不適**）。周の長さ＝4×（1辺）。 ア の1辺＝$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$（cm）　→　周の長さ＝$4\times4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$（cm） イ の1辺＝$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$（cm）　→　周の長さ＝$4\times5\sqrt{2}=20\sqrt{2}$（cm） 差は　$20\sqrt{2}-16\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{2}}$ **（cm）**（≒5.66cm ＞ 0 で、イのほうが長いという条件に適する ○） 別解：1辺の差が $5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$ cm なので、周の差はその4倍で $4\sqrt{2}$ cm。 ※ $\sqrt{50}-\sqrt{32}=\sqrt{18}$ としてしまう誤りに注意（$\sqrt{\ }$ どうしはそのままひけない）。

考6 3直線で囲まれた三角形 ［各3点／計6点］

(1)	$(-3-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$	ℓ：y＝x＋3 と n：y＝$-\sqrt{3}$ を連立する。 x＋3＝$-\sqrt{3}$ → x＝$-3-\sqrt{3}$ よって交点は（$-3-\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$） 検算：x＋3＝($-3-\sqrt{3}$)＋3＝$-\sqrt{3}$ ○
(2)	$12+6\sqrt{3}$	m と n の交点は −x＋3＝$-\sqrt{3}$ → x＝3＋$\sqrt{3}$ より（$3+\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$） ℓ と m の交点は x＋3＝−x＋3 → x＝0、y＝3 より（0，3） 直線 n 上の辺を底辺とみると 底辺＝($3+\sqrt{3}$)−($-3-\sqrt{3}$)＝$6+2\sqrt{3}$ 高さ＝3−($-\sqrt{3}$)＝$3+\sqrt{3}$ （頂点 (0,3) と直線 n の y 座標の差） 面積＝$\frac{1}{2}\times(6+2\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})=(3+\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})=(3+\sqrt{3})^2$ ＝$9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$ 検算（概数）：底辺≒9.46、高さ≒4.73 → 面積≒22.4。12＋6×1.732≒22.4 ○

知識・技能 64点　＋　思考・判断・表現 36点　＝　合計 100点（小問 37問）